OSSERVAZIONI

SOPRA LE MACCHINE IN MOTO

DI

GIORGIO BIDONE

PROFESSORE D' IDRAULICA TEORICA E SPERIMENTALE NELLA REGIA UNIVERSITA, E MEMBRO DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO; SOCIO ATTUALE DELLA SOCIETA ITALIANA DELLE SCIENZE RESIDENTE IN MODENA.

TORINO 1825.

DALLA STAMPERIA REALE.

OSSERVAZIONI

SOPRA LE MACCHINE IN MOTO.

Nelle macchine in moto si considerano due casi distinti. L' uno è quando il loro moto è *uniforme*: l' altro quando esso è *vario* o *variabile*. Nel moto *uniforme* la potenza e la resistenza non cambiano nè grandezza nè velocità. E poichè le velocità della potenza e della resistenza sono proporzionali ai bracci di leva ai quali queste sono applicate, ne segue che la potenza e la resistenza necessarie per conservare l' uniformità del movimento nelle macchine hanno tra loro quelle stesse relazioni che si richiedono pel semplice equilibrio, quando si suppongono nulli gli ostacoli che oppongono al movimento gli attriti e l' inerzia delle diverse parti della macchina. Quando poi esistono sì fatti ostacoli, allora per mettere e conservare la macchina in movimento è necessaria una potenza maggiore della resistenza.

Nel moto *vario* la relazione tra la potenza e la resistenza varia in ciascun istante del moto, perchè o le grandezze o le velocità della potenza e della resistenza, o le une e le altre variano successivamente nel tempo del movimento.

L' espressione delle leggi del moto vario non è così semplice come quella del moto uniforme; ed inoltre essa è diversa da una macchina all' altra secondo il modo particolare con cui la potenza e la resistenza agiscono tra loro, e secondo la legge con cui le grandezze di queste variano successivamente. Queste variazioni facendosi a gradi da un istante all' altro, non si possono esprimere se non

per via di relazioni tra gli incrementi delle velocità e delle forze, relativi a ciascun istante del moto.

I principj della meccanica somministrano formole generali per esprimere analiticamente queste relazioni in ciascun caso particolare, e senza questa espressione analitica non è possibile di determinare le circostanze e le proprietà di questa sorta di movimenti, e di avere la misura dell'effetto che avrà prodotto la forza motrice dopo un dato tempo.

L'effetto di una macchina, che si muove con moto vario, se non si pone mente alla parte dovuta all'accelerazione, può sembrare assai maggiore di quello che essa realmente produce quando si muove con moto uniforme; come appunto sembrerebbe di gran lunga maggiore di quello che veramente è, l'effetto di un projetto, se, non avuto riguardo alla sua velocità, si paragonasse solamente la sua piccola massa con quella delle moli che esso smuove e rovescia. Quindi non di rado accade che persone non atte a queste ricerche, osservando l'effetto prodotto da una macchina mossa con moto vario, facilmente si inducono a credere che il medesimo effetto sia inerente alla disposizione ed alla combinazione della macchina, e che esso debba pur sussistere nel moto uniforme; e non vedendone l'origine e la causa, nè sapendone determinare l'andamento e la misura, giungono talvolta ad immaginarsi di avere scoperto fenomeni nuovi e non osservati prima, i quali siano contrarj ai principj ed ai fatti della meccanica, dimostrati e confermati da continue giornaliere sperienze.

Ma anche senza la prova del fatto, che riconduce mai sempre qualsivoglia macchina alla condizione di tutte le altre, quando essa è ridotta a moto uniforme, è facile il convincersi che il supposto maggior effetto dipende da

tutt' altra cagione che dalla disposizione e combinazione particolare della macchina, e che esso, anzichè essere contrario ai principj generali della meccanica, ne è una conseguenza immediata ed una conferma.

A questo fine ho scelto alcune questioni semplicissime di moto vario, le quali sono o note o facilmente si riducono a casi noti, e tutte dipendono dai principj e dalle formole che si insegnano e si dimostrano nei Trattati. Queste formole sono fondate sulla geometria e sull' analisi, le quali debbono necessariamente intramettersi in questi e in simili argomenti, e senza le quali è concetto vano il credere di poterne rettamente trattare, ed è opera perduta il tentarlo.

La semplicità delle proposte questioni è tale, che i risultamenti numerici ai quali si arriva, potrebbero anche sottoporsi alla conferma dell'esperienza, qualora questa fosse necessaria, e potesse accrescere il valore delle dimostrazioni dirette.

La risoluzione delle stesse questioni mostra come casi assai semplici di moto vario conducono sovente ad espressioni complicate. Ma è noto che quantunque le prime leggi del movimento siano affatto semplici, esse diventano tuttavia più o meno composte nelle loro espressioni secondo la varia disposizione delle macchine, e secondo il modo con cui le parti delle medesime dipendono le une dalle altre.

Si sa che una espressione analitica, qualunque essa sia, indica il sistema, ossia la serie delle diverse operazioni necessarie a farsi per ottenere il numero che si cerca; e ben si vede che secondo la diversità delle questioni e delle ricerche, le espressioni analitiche prenderanno altre forme più o meno complicate, e indicheranno altre serie di operazioni. Nell' aritmetica stessa per ottenere

un numero finale è forza il più delle volte passare per una lunga serie di operazioni diverse. Ma le sole espressioni analitiche hanno il pregio di presentare e comprendere in modo generale, conciso ed ordinato la serie delle operazioni da farsi per ottenere quel numero o quella relazione che in una proposta questione si cerca.

Per verità sarebbe cosa sommamente desiderabile che le espressioni e i metodi analitici fossero tutti egualmente semplici e piani: ma la loro complicazione, quando essa è inerente alla natura medesima della questione, è inevitabile, e ne è oziosa ed irragionevole ogni censura. Così il cercare quando e come si può condurre il perimetro di una ellisse per cinque punti dati sopra un piano, non sarà mai una operazione così semplice e così spedita, come lo è la ricerca di un circolo, la cui circonferenza passi per tre punti dati; e la determinazione del movimento di una palla lanciata da un cannone richiederà sempre una tutt' altra scienza di calcolo e di meccanica di quel che richiegga la determinazione dell' equilibrio di una leva.

Fra le questioni che qui si considerano, altre appartengono alla meccanica de' corpi solidi, altre a quella de' liquidi e de' fluidi elastici, ed altre sono relative alla forza degli agenti animati, adoperata al movimento delle macchine. Per darne un' idea riferiremo i risultamenti numerici ottenuti nella seguente questione. Uno stantuffo può scorrere lungo un tubo verticale, fisso ed aperto alle sue estremità con una delle quali pesca in un liquido di livello invariabile. Lo stantuffo è attaccato ad un filo verticale, il quale, passando sopra una carrucola di rimando, sostiene dall' altra parte una massa data e costante. Al principio del moto lo stantuffo è situato all' estremità inferiore del tubo, ed allo stesso livello della

superficie invariabile del liquido, con cui è in contatto. Abbandonando la massa all' azione della gravità, cosicchè essa discendendo faccia salire lo stantuffo, si trova che se il peso di questa massa è eguale alla metà di quello della colonna del liquido dato, che la pressione atmosferica sosterrebbe nel tubo vuoto d' aria, questa massa, per l' accelerazione cagionata dalla gravità, fa salire lo stantuffo all' altezza della detta colonna, in modo che il sottoposto liquido, spinto dalla pressione atmosferica, sale nel tubo e non cessando mai d' essere in contatto collo stantuffo, si solleva a pari altezza nel tubo. Ottenuta quest' altezza del liquido nel tubo, è spenta la velocità della massa la quale più non discende.

In questo movimento la massa discendendo s'accelera a gradi sino alla metà della sua corsa totale; giunta a questo punto essa ha la massima velocità, la quale è li sessantasette centesimi di quella che essa avrebbe acquistato se il suo moto fosse stato affatto libero; ed il tempo supera di sedici centesimi quello che essa avrebbe impiegato a discendere liberamente per uguale spazio. Al di là di questo punto la massa continua a discendere, ma la sua velocità si rallenta gradatamente, ed è tutta estinta quando lo spazio percorso dalla massa è eguale all' altezza della colonna liquida che la pressione atmosferica sosterrebbe nel tubo vuoto d'aria.

Cessata la discesa della massa, lo stantuffo e la sottostante colonna liquida tosto discendono, cacciati all'ingiù dalla pressione atmosferica, e per tal modo si solleva l'opposta massa all'altezza che aveva prima; e così la macchina si riduce ad un pendolo.

Il moto vario con cui la massa, discendendo, solleva lo stantuffo ed aspira il liquido nel tubo, è affatto identico col moto vario con cui una data massa, discendendo,

farebbe emergere un solido da un liquido. Così si trova che una massa qualunque discendendo per la propria gravità, può far emergere dal liquido un solido di massa doppia. Ma nel caso del tubo il peso della massa che discende, deve soddisfare a certe determinate condizioni che si assegnano, affinchè lo stantuffo alzandosi nel tubo, non si stacchi dal liquido che esso aspira.

Se poi si considera il caso in cui il tubo, di qualsivoglia lunghezza, è pieno di liquido, e vi sono diversi stantuffi fissi allo stesso filo, posti ad una distanza l'un dall' altro non maggiore dell' altezza cui la pressione atmosferica può equilibrarsi col liquido dato, si trova che per mettere e mantenere in moto uniforme una simile macchina, è necessaria una massa equivalente al peso di tutto il liquido contenuto nel tubo, la quale si muova essa pure con velocità uniforme, ma limitata affinchè lo stantuffo inferiore non si stacchi dalla sottostante colonna liquida da esso aspirata.

I principj di Fisica e di Meccanica dai quali derivano i riferiti risultamenti, sono esposti al n.° 7.

I diversi esempj di moto vario che qui si adducono, potranno servire di esercizio ai giovani i quali per genio o per dovere si applicano a questi studj, e porger loro occasione di proporsene altri; potranno ancora premunire i medesimi dagli errori di autori imperiti ed incapaci, i quali mal conoscendo la natura ed il potere delle macchine, ed esagerando gli effetti di quelle che essi propongono, indurrebbero in pregiudiciali inganni chi prestasse fede alle loro vane promesse.

1. *Un filo passa sopra una troclea mobile intorno al suo asse fisso E, (fig. 1.) e sostiene da un capo una massa M data e costante; dall' altro capo sostiene un cilindro solido BD, immerso in un liquido stagnante e di livello invariabile C, la cui gravità specifica è uguale a quella del cilindro solido.*

Abbandonando questi corpi così uniti all' azione della gravità, si domanda di determinare il loro movimento.

Il peso della massa M sia equivalente al peso di un cilindro di eguale materia e sezione del cilindro BD, e di altezza H, e suppongasi che al principio del moto il cilindro BD sia tutto immerso nel liquido, dimodochè la sua base superiore B sia allo stesso livello del liquido.

Chiamata L la lunghezza costante del cilindro BD; x lo spazio percorso dalla massa M dopo il tempo t; v la velocità della stessa massa alla fine di questo tempo; e prescindendo dagli attriti e dall' inerzia della troclea, si avrà

$$(A) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = g\left[\frac{H-x}{H+L}\right],$$

ove g è la gravità terrestre.

Integrando questa equazione in modo che sia $v=0$ quando $x=0$, ed osservando che è $\frac{dx}{dt}=v$, si ottiene

$$v^2 = 2g\left(\frac{2Hx-x^2}{2(H+L)}\right).$$

Pertanto sarà anche $v=0$ quando $x=2H$. Quindi la massa M discenderà tanto che essa solleverà fuori del liquido una parte del cilindro di peso doppio del proprio peso.

La velocità massima della massa M è nel punto in cui $x=H$ ed ha per valore

$$V=\sqrt{2gH:\frac{H}{2(H+L)}}.$$

Si ha pure

$$t=\frac{2\sqrt{2(H+L)}}{\sqrt{(2g)}}.\text{ arc. tang.}\sqrt{\frac{x}{2H-x}}.$$

Perciò quando $x=H$ si ha

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{H+L}{g}};$$

e quando $x=2H$ si ha

$$t=\pi.\sqrt{\frac{H+L}{g}};$$

ove 2π è la circonferenza di un circolo il cui raggio è l' unità.

Quindi la massima velocità corrisponde alla metà della discesa totale ed alla metà del tempo totale.

Se si prende $L=2H$, il cilindro sarà tutto sollevato fuori del liquido con una massa M di un peso eguale alla metà del peso del cilindro: ma lo spazio percorso dal centro di gravità della massa M sarà doppio dello spazio percorso dal centro di gravità del cilindro sollevato fuori del liquido.

Qualunque sia la lunghezza del clindro, la massa M ne farà sempre emergere dal liquide una parte, la quale peserà il doppio della massa M, na il tempo necessario per tale alzamento sarà sempre più lungo a misura che la lunghezza L del cilindro sarà maggiore.

2. I risultamenti precedenti suppongono che l' attrito contro l' asse della troclea, e la massa di questa siano nulli o possano trascurarsi. Se ciò non fosse se ne terrà conto nel modo seguente.

Sia f il coefficiente dell' attrito e $2T$ la lunghezza di una colonna di liquido di sezione eguale a quella del cilindro solido, e tale che il suo peso equivalga al peso della troclea. Siano inoltre a il raggio della troclea ed r quello del suo asse. Ciò posto, in vece dell' equazione (A) si avrà la seguente

$$(A') \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = g\left[\frac{H\left(1-\frac{fr}{a}\right)-x\left(1+\frac{fr}{a}\right)}{T+H+L}\right],$$

dalla quale si ricava

$$v^2 = 2g.\left[\frac{2H\left(1-\frac{fr}{a}\right)x-\left(1+\frac{fr}{a}\right)x^2}{2(T+H+L)}\right].$$

Di qui si vede che sarà $v=0$ quando

$$x = \frac{2H\left(1-\frac{fr}{a}\right)}{1+\frac{fr}{a}}.$$

La velocità sarà massima quando

$$x = H\left(\frac{1-\frac{fr}{a}}{1+\frac{fr}{a}}\right),$$

ed avrà per valore

$$V = \sqrt{2gH.\frac{\left(1-\frac{fr}{a}\right)^2.H}{2\left(1+\frac{fr}{a}\right)[T+H+L]}}.$$

La relazione tra il tempo e lo spazio sarà espressa dall' equazione

$$t = 2\sqrt{\frac{T+H+L}{\left(1+\frac{fr}{a}\right)g}}.\text{arc.tang.}\sqrt{\frac{\left(1+\frac{fr}{a}\right)x}{2H\left(1-\frac{fr}{a}\right)-\left(1+\frac{fr}{a}\right)x}}.$$

Sia, per modo d' esempio,

$$\frac{fr}{a} = \frac{1}{50}\,; \quad T = \frac{1}{100}(H+L)\,;$$

sarà la discesa totale

$$\frac{49}{51}\,.\,2H\,;$$

la velocità massima

$$0{,}96\,.\sqrt{2gH.\frac{H}{2(H+L)}}\,;$$

ed il tempo totale

$$(0{,}995)\,.\,\pi\,.\sqrt{\frac{H+L}{g}}\,.$$

Da questi valori si vede il discapito cagionato dall' attrito e dall' inerzia della troclea.

Questione 2.

3. *Sopra una troclea mobile intorno al suo asse fisso E (fig. 2.) passa un filo i cui due rami sono verticali. Ad uno di questi è appesa una massa costante M, e all' altro uno stantuffo B di diametro eguale a quello di un tubo verticale fisso, lungo il quale può scorrere. Il tubo è aperto alle sue estremità, con una delle quali pesca in un liquido di livello invariabile.*

Considerando il caso in cui lo stantuffo è situato all' estremità inferiore C del tubo, ed è in contatto colla superficie invariabile del liquido contenuto nel recipiente,

si domanda la determinazione del moto di questo sistema, quando si abbandona la massa M all' azione della gravità.

Esprimasi per h l' altezza di una colonna del liquido dato di base eguale alla sezione del tubo, e di peso eguale a quello dello stantuffo. Così pure esprimasi per $K+h=H$ una simile colonna equivalente al peso della massa costante M, che si suppone divisa in due parti, una delle quali è equivalente al peso dello stantuffo, e l' altra è quella che produce il moto.

Ciò posto, chiamiamo x lo spazio percorso dalla massa M dopo il tempo t, avremo, prescindendo dagli attriti e dall' inerzia della troclea,

$$(B) \quad \frac{d^2x}{dt^2}=g\left[\frac{K-x}{K+2h}\right].$$

Integrando questa equazione, identica coll' equazione (A), in modo che sia $v=0$ quando $x=0$, si ottiene

$$v^2=2g\left[\frac{2Kx-x^2}{2[K+2h]}\right];$$

e quindi

$$t=2\sqrt{\frac{K+2h}{g}}\,.\,\text{arc. tang.}\sqrt{\frac{x}{2K-x}},$$

ove $t=0$ quando $x=0$.

Da queste equazioni si ricava che la velocità è massima quando $x=K=H-h$ ed il suo valore è

$$V=\sqrt{2gK.\frac{K}{2(K+2h)}}.$$

Si ricava inoltre che la velocità è nulla quando si ha

$$x=2K=2(H-h);$$

e questa è la discesa totale della massa M.

La durata di questa totale discesa è

$$\pi\sqrt{\frac{K+2h}{g}};$$

e la durata della metà di essa discesa è

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{K+2h}{g}}.$$

Perciò la massima velocità corrisponde alla metà della discesa totale ed alla metà del tempo totale.

Pertanto siccome alla discesa della massa M corrisponde una eguale salita dello stantuffo B, si vede che se il liquido seguirà lo stantuffo e sarà sempre in contatto col medesimo, esso liquido s' alzerà nel tubo all' altezza $2K$, purchè quest' altezza non superi quella a cui s' alzerebbe il liquido nel vacuo in forza della pressione atmosferica. Con queste condizioni un peso rappresentato da K, discendendo in virtù della gravità, fa alzare nel tubo una colonna liquida di doppio peso.

4. Ma può arrivare che lo stantuffo salga con una celerità maggiore di quella con cui il liquido gli tien dietro, cosicchè si stacchi dal liquido, e rimanga un vuoto tra questo e lo stantuffo. Al di là del punto in cui ciò arriverà, il movimento dello stantuffo e della massa non è più rappresentato dalle equazioni precedenti, ma esso dipende da altre considerazioni come vedremo in altra questione, e più non sussiste l' identità del moto dello stantuffo e della colonna liquida che esso aspira, col moto del solido che emerge dal liquido, considerato nella questione precedente.

Ora cercheremo le condizioni necessarie, affinchè il liquido alzandosi nel tubo, sia sempre in contatto collo stantuffo.

La velocità con cui ascende lo stantuffo, è

$$v=\sqrt{\frac{2g(2Kx-x^2)}{2K+4h}}$$

e chiamando A l' altezza del liquido che fa equilibrio alla pressione atmosferica, la velocità con cui esso sale nel tubo, è espressa da

$$u=\sqrt{2g(A-x)}.$$

Affinchè dunque il liquido sia sempre in contatto collo stantuffo, dovrà essere $v=u$, oppure $v<u$, cioè

$$\sqrt{\frac{2Kx-x^2}{2K+4h}}<\sqrt{A-x},$$

notando che non può mai essere $x>A$ ed $x>2K$.

Pertanto, tosto che sarà

$$\sqrt{\frac{2Kx-x^2}{2K+4h}}>\sqrt{A-x},$$

lo stantuffo si staccherà dal liquido.

5. Per fare qualche applicazione di questi risultamenti esprimansi K ed h per A, e prendasi per modo d'esempio

$$h=\frac{A}{40}; \quad K=\frac{A}{2};$$

e vediamo se con questa massa rappresentata da $\frac{A}{2}$ il liquido alzandosi nel tubo potrà essere sempre in contatto collo stantuffo ed elevarsi all' altezza $2K=A$. Affinchè ciò succeda, dovrà essere, da $x=0$ sino ad $x=A$,

$$\sqrt{\frac{Ax-x^2}{A+\frac{A}{10}}}<\sqrt{A-x}.$$

Ora questa condizione è evidentemente soddisfatta; perciò il liquido accompagnerà sempre lo stantuffo sino all' altezza $x=A$, ove cesserà il moto dell' uno e dell' altro.

La velocità massima si troverà al punto in cui $x=K=\frac{A}{2}$;

il suo valore sarà

$$V = \sqrt{2g \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{5}{11}} = (0{,}67) \sqrt{2g \cdot \frac{A}{2}},$$

ed il tempo impiegato dalla massa a discendere per lo spazio $x = \frac{A}{2}$, sarà

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{11}{20}} \cdot \sqrt{\frac{A}{g}} = (1{,}16) \sqrt{\frac{A}{g}}.$$

Il tempo della discesa totale della massa M sarà

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{11}{40}} \cdot \sqrt{\frac{2A}{g}} = (1{,}65) \sqrt{\frac{2A}{g}}.$$

Così se il liquido dato è mercurio, si farà $A =$ met. 0,76 e notando che è $2g =$ met. 19,6176 si troverà per la velocità massima e pel tempo della discesa totale

$$V = \overset{\text{met.}}{1{,}84}; \quad t = 0'',65.$$

Si prenda adesso $K = A$, e si ritenga $h = \frac{A}{40}$. La condizione affinchè lo stantuffo non si stacchi dal liquido, diventa

$$\sqrt{\frac{2Ax - x^2}{2A + \frac{A}{10}}} < \sqrt{A - x}.$$

Ma questa condizione non è soddisfatta che da $x = 0$ sino ad $x = \frac{6A}{10}$: perciò quando la massa M sarà discesa per lo spazio $x = \frac{6A}{10}$, lo stantuffo si staccherà dal liquido, e si farà un vuoto tra questo e lo stantuffo. L'uno e l'altro continueranno ad alzarsi, e la massa M continuerà a discendere, ma i loro moti non saranno più espressi dalle equazioni precedenti. Al punto in cui lo stantuffo si staccherà dal liquido, la velocità dello stantuffo

e della massa sarà, posto che il liquido dato sia mercurio,

$$v = 2{,}44 \text{ met.};$$

il tempo impiegato a percorrere lo spazio $\frac{6A}{10}$ sarà

$$t = 0'',33 .$$

Da questi esempj si vede come si dovrebbe operare se K ed h avessero altri valori, e se in vece del mercurio vi fosse altro liquido nel recipiente.

6. Consideriamo adesso il caso in cui lo stantuffo discende e la massa M sale.

Il liquido nel tubo abbia l' altezza iniziale F, e sia in contatto collo stantuffo. Chiamiamo y lo spazio percorso dallo stantuffo nel tempo t, e ritenute le altre denominazioni, avremo l' equazione

$$(C) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = g\left[\frac{F-K-y}{K+2h}\right];$$

la quale integrata in modo che sia $v=0$ quando $y=0$, somministra

$$v^2 = 2g\left[\frac{2(F-K)y-y^2}{2(K+2h)}\right];$$

e da questa si ottiene

$$t = 2\sqrt{\frac{K+2h}{g}} \,.\, \text{arc. tang.} \sqrt{\frac{y}{2(F-K)-y}} .$$

Da queste equazioni si raccoglie che sarà $v=0$ quando si avrà

$$y = 2(F-K);$$

la velocità sarà massima quando

$$y = F-K;$$

ed il suo valore sarà

$$V = \sqrt{2g \,.\, \frac{(F-K)^2}{2(K+2h)}} .$$

Il tempo della discesa totale corrispondente allo spazio $y=2(F-K)$ sarà

$$t=\pi\sqrt{\frac{K+2h}{g}},$$

ed il tempo della discesa per lo spazio $y=F-K$ corrispondente alla massima velocità sarà

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{K+2h}{g}}.$$

Ma qui vuolsi osservare che le equazioni precedenti relative alla discesa dello stantuffo non possono impiegarsi che da $y=0$ sino ad $y=F$, cioè sinchè lo stantuffo sia giunto al livello del liquido contenuto nel recipiente. Perciò se il valore

$$y=2(F-K)$$

della discesa totale dato dalle equazioni precedenti sarà maggiore di F, non potrà dirsi che a questo valore di y corrisponda il tempo t assegnato di sopra, poichè lo stantuffo per i valori di $y>F$ cambia natura di movimento. Affinchè dunque lo stantuffo discenda sino al livello del liquido contenuto nel recipiente, ed ivi la sua velocità sia nulla, deve essere $2(F-K)=F$, cioè $F=2K$.

Pertanto nel caso in cui sarà $F=2K$, la velocità massima corrisponderà ad $y=K$, ed il suo valore sarà

$$V=\sqrt{2gK.\frac{K}{2K+4h}};$$

il moto sarà spento quando $y=2K$, e la sua durata sarà

$$\pi\sqrt{\frac{K+2h}{g}}.$$

Abbiamo veduto che quando è $K=\frac{A}{2}$ (n.° 5.), il liquido s'alza nel tubo all' altezza A, ed è sempre, nel

tempo della sua salita, in contatto collo stantuffo. Perciò quando l' altezza iniziale del liquido nel tubo è A, e la massa è $\frac{A}{2}$, facendo nelle equazioni precedenti $F=A=2K$, si troverà che il moto con cui lo stantuffo discenderà, è identico con quello con cui la massa M è discesa quando lo stantuffo saliva. Così questo sistema della massa M e dello stantuffo che si muove nel proposto tubo, forma un pendolo le cui oscillazioni si fanno da una parte e dall' altra in egual tempo, ed hanno eguale ampiezza sulle linee verticali lungo le quali e lo stantuffo e la massa oscillano.

7. Per determinare le circostanze del movimento della massa e dello stantuffo abbiamo assunto, secondo ciò che si dimostra negli *Elementi* di *Fisica* e d' *Idraulica* che la *parte* della pressione atmosferica che agisce sullo stantuffo, sia esso in quiete oppure in moto, è in ogni istante rappresentata dall' altezza BC (fig. 2.) della sottostante colonna liquida *aspirata*, purchè questa sia in contatto collo stantuffo. Dal che segue che la pressione sullo stantuffo è nulla quando questo si trova all' estremità inferiore C del tubo, e che essa cresce alzandosi lo stantuffo, ed ha il massimo valore quando l' altezza BC della colonna aspirata è eguale all' altezza della colonna di liquido cui la pressione atmosferica può far equilibrio. Giunta la pressione sullo stantuffo a questo massimo valore, più non cresce ancorchè lo stantuffo continui ad alzarsi, e rimanga così uno spazio vuoto tra esso e la colonna liquida contenuta nel tubo.

Introdotta perciò nell' equazione del movimento la pressione *variabile* e *crescente* sullo stantuffo che sale, e l' *accelerazione* dovuta alla gravità della massa costante che discende, si è veduto (n.° 5.) che colla discesa di

una massa data si solleva nel tubo, mediante l' aspirazione dello stantuffo, una colonna liquida di *peso doppio* di quello della massa data.

Da ciò si vede quanto andrebbe errato chi operando senza la scorta della geometria e dell' analisi, e non valutando a dovere le forze dalle quali risulta l' elevazione dello stantuffo e del liquido, e confondendone gli effetti, attribuisse a *diminuzione* di pressione sullo stantuffo che sale, ciò che è dovuto all' *accelerazione* della massa che discende; e mal intendendo le dottrine relative alla *pressione* atmosferica ed al *moto* delle macchine, credesse di provarne falsi i principj insegnati e dimostrati dai Fisici e dagli Idraulici, coll' opporre a questi principj un fatto, il quale ne è una conseguenza immediata ed una conferma.

Da quanto si è esposto nella presente questione potranno pure i giovani utilmente raccogliere, che in questioni anche le più semplici ed affatto elementari si commetterebbero gravi errori da chi pigliasse a trattarne non preparato con appropriati studj, e non fornito di adatte cognizioni.

8. Se si vorrà aver riguardo all' attrito dello stantuffo contro le pareti del tubo, ed a quello della troclea contro il suo asse ed all' inerzia della medesima, in vece delle equazioni (B) e (C) converrà valersi delle seguenti,

$$(B') \quad \frac{d^2x}{dt^2}=g\left[\frac{K\left(1-\frac{fr}{a}\right)-h\left(n+\frac{2fr}{a}\right)-\left(1+\frac{fr}{a}\right)x}{T+K+2h}\right];$$

$$(C') \quad \frac{d^2y}{dt^2}=g\left[\frac{(F-y)\left(1-\frac{fr}{a}\right)-K\left(1+\frac{fr}{a}\right)-h\left(n+\frac{2fr}{a}\right)}{T+K+2h}\right]:$$

in queste equazioni f, r, a e T hanno la significazione espressa al n.° 2, ed ngh rappresenta l' attrito, supposto costante, dello stantuffo contro le pareti del tubo.

Da queste equazioni che hanno la stessa forma delle (B) e (C), si ricaverà facilmente la velocità, la durata e la grandezza delle successive discese e salite della massa M e dello stantuffo sino alla cessazione del moto.

Questione 3.

9. *Ritenuta la fig. 2, si domanda la determinazione del moto della massa M e dello stantuffo B quando la parte superiore BD del tubo è piena di liquido in modo che lo stantuffo, alzandosi, fa uscire dalla sommità del tubo tanto liquido quanto è quello che aspira dal recipiente.*

Consideriamo il caso in cui la lunghezza CD del tubo è eguale all' altezza A della colonna liquida cui la pressione atmosferica farebbe equilibrio, e supponiamo che al principio del moto lo stantuffo B sia al livello del liquido contenuto nel recipiente.

Conservate le denominazioni precedenti, è chiaro che se il valore della massa M fosse eguale a quello rappresentato da $A+h$, tutto il sistema resterebbe in equilibrio. Pertanto per far discendere questa massa sarebbe necessario o di aggiungere alla medesima un' altra massa che rappresenteremo coll' altezza m, oppure di imprimere alla massa $M=A+h$ una velocità iniziale C diretta dall' alto al basso.

Osservando che la massa liquida sovrastante allo stantuffo è mossa dal medesimo, e che inoltre questo soffre continuamente una pressione espressa dall' altezza della colonna liquida compresa tra esso ed il livello costante del liquido contenuto nel recipiente, si avrà l' equazione

$$(D) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gm}{2A+2h+m-x},$$

la quale integrata in modo che sia $v = C$ quando $x = 0$, somministra

$$v^2 = C^2 + 2gm . \log. \left(\frac{2A + 2h + m}{2A + 2h + m - x} \right).$$

Pertanto se l' equilibrio si rompe coll' aggiungere alla massa M un' altra massa m, il moto che si ottiene è vario, e la velocità cresce sempre per piccola che sia la massa aggiunta m. Ma si vede che affinchè questo moto possa durare indefinitamente, è necessario che la massa $M + m$ possa sempre discendere finchè dura il movimento.

Se poi l' equilibrio si rompe senza l' aggiunta di alcuna massa, ma imprimendo solamente alla massa primitiva $A + h$ una velocità iniziale C, il moto sarà uniforme, e si avrà

$$v = C;$$

e C dovrà essere tale che il liquido aspirato nel tubo sia sempre in contatto collo stantuffo.

In questa maniera di rompere l' equilibrio e di mettere e mantenere lo stantuffo in moto uniforme, la quale è l' unica che sia generalmente applicabile alle macchine, le condizioni del moto uniforme del proposto sistema sono identiche con quelle richieste per ogni altra macchina.

Si ottengono simili risultamenti nel caso in cui il tubo abbia una lunghezza qualunque, e vi siano parecchi stantuffi invariabilmente uniti tra loro, i quali si succedano ad una distanza l' un dall' altro non maggiore dell' altezza A cui il liquido può essere sostenuto nel tubo dalla pressione atmosferica.

Ma per una più precisa determinazione del moto, e per conoscere di quanto la potenza dovrà superare il peso della colonna liquida sollevata dagli stantuffi per metterla e mantenerla in moto uniforme, converrà tener conto

degli attriti e dell'inerzia della troclea, come si è mostrato nelle precedenti questioni.

Questione 4.

10. *Il tubo essendo pieno di liquido nella parte superiore allo stantuffo, si suppone che l'estremità inferiore del tubo (fig. 3.) sia aperta; e comunichi coll' aria esterna. Tutto il resto essendo come nella questione precedente; si domandano le equazioni del moto della massa e dello stantuffo.*

Ritenute le denominazioni precedenti, ed avvertendo che la lettera A, la quale esprime l' altezza iniziale del liquido nel tubo, può avere nel caso presente un valore qualunque, avremo l' equazione

$$(E) \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=g\left(\frac{m+x}{2A+2h+m-x}\right),$$

ove m rappresenta la massa aggiunta alla massa $A+h$ per rompere l' equilibrio che questa faceva allo stantuffo ed al liquido contenuto nel tubo.

L' integrale dell' equazione precedente è

$$v^2=C^2+4g(A+h+m)\log.\left[\frac{2A+2h+m}{2A+2h+m-x}\right]-2gx.$$

Da ciò si vede che il moto sarà sempre vario sia che l' equilibrio si rompa colla sola velocità iniziale C impressa alla massa $A+h$, sia che esso si rompa colla sola aggiunta della massa m senza velocità iniziale. In ogni caso la velocità v cresce crescendo x. Ma se la velocità v diventasse maggiore di 395 metri per 1″, allora si farebbe un vuoto sotto lo stantuffo, e l' equazione precedente non ne esprimerebbe più il movimento. Esso si determinerà nella questione seguente.

QUESTIONE 5.

11. *Un filo passa sopra una troclea mobile intorno al suo asse fisso E (fig. 4.) e sostiene da una parte una massa costante M, e dall' altra uno stantuffo B, che può scorrere lungo un tubo verticale chiuso alla sua estremità inferiore C ed aperto superiormente.*

Supponendo in primo luogo che non vi sia liquido nel tubo, e che al principio del moto lo stantuffo tocchi il fondo C del tubo, ed i due rami del filo siano verticali, si domanda di determinare il moto di questo sistema, quando si abbandonerà la massa M all' azione della gravità.

È chiaro che alzandosi lo stantuffo, si forma un vuoto perfetto nella parte inferiore del tubo; e perciò lo stantuffo dovrà in ogni istante vincere una resistenza equivalente al peso della pressione atmosferica, cioè al peso di una colonna di mercurio alta metri 0,76 e di base eguale a quella dello stantuffo. Chiamando A l' altezza di questa colonna, e ritenute le altre denominazioni impiegate precedentemente, si avrà l' equazione

$$(F) \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=g\left(\frac{K-A}{K+2h}\right),$$

dalla quale si ricava

$$v^2=C^2+\frac{2g(K-A)x}{K+2h},$$

ove C è la velocità iniziale impressa alla massa M. Posto $K=A$ si ha per tutta la durata del moto

$$v=C.$$

Questo caso è quello indicato nella precedente questione 2 al n.° 5.° cioè quando essendo ivi $K=A$, lo stantuffo si stacca dal liquido con velocità $v=$ met. 2,44, colla quale si vede dalla presente questione che esso

continuerà a salire nel tubo, vincendo ad ogni istante tutta la pressione atmosferica, mentre prima di staccarsi dal liquido, esso non ne doveva vincere che una parte continuamente variabile, equivalente al peso della sottoposta colonna liquida contenuta nel tubo. Perciò quando nel caso ora accennato lo stantuffo si staccherà dal liquido, esso salirà con velocità costante eguale a quella che aveva nell' istante in cui s' è staccato dal liquido. Questi risultamenti suppongono nulli gli attriti e nulla la massa della troclea, ma per ciò che si è detto, è facile tenerne conto, e riconoscere quanta parte di moto essi distruggano.

Si consideri in secondo luogo il caso in cui al principio del moto il tubo è pieno di liquido.

Chiamata L la lunghezza del tubo, e ritenute le altre denominazioni, l' equazione del movimento sarà

$$(FF) \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{g(K-A-L-x)}{K+L+2h-x},$$

dalla quale integrata si ottiene

$$v^2=C^2+2gx+2g(A+2L+2h)\log.\left(\frac{K+L+2h-x}{K+L+2h}\right);$$

ove C è la velocità iniziale della massa M. Questa equazione appartiene al caso considerato alla fine della precedente questione (n.° 10).

Questione 6.

12. *Una catena pesante, flessibile ed uniforme passa sopra una troclea mobile intorno al suo asse fisso E (fig. 5.). I due rami della catena al di qua e al di là della troclea sono verticali, ed al principio del moto uno di essi è più lungo dell' altro della quantità H, e la*

lunghezza totale della catena è L. Si domanda la determinazione del movimento quando la catena sarà abbandonata all' azione della gravità.

Chiamando x lo spazio percorso dall' estremità H dòpo il tempo t, si avrà

$$(G) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = g\left[\frac{H+2x}{L}\right],$$

dalla quale, posto $v=0$ quando $x=0$, si ricava

$$v^2 = 2gx\left(\frac{H+x}{L}\right):$$

Facendo in questa espressione $x=\frac{L-H}{2}$, si ha

$$v = \sqrt{2g\left(\frac{L-H}{2}\right)\cdot\left(\frac{H+L}{2L}\right)}.$$

Questa sarà la velocità della catena quando il suo ramo più corto sarà giunto colla sua estremità alla sommità della troclea: e siccome è sempre $H+L<2L$, si vede che questa velocità è sempre minore di quella che la parte H della catena mobile avrebbe acquistato discendendo liberamente per l' altezza $\frac{L-H}{2}$.

Sia per modo d' esempio $L=11.H$, e si faccia $x=5H$, si avrà

$$v=(0,74)\sqrt{2g.5H}:$$

Cioè la velocità della catena quando essa ha percorso lo spazio $5H$, è li tre quarti della velocità dovuta alla discesa libera per lo spazio $5H$.

L' equazione tra v ed x somministra

$$t = \sqrt{\frac{L}{2g}}\,.\log.\left(\frac{\sqrt{H+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{H+x}-\sqrt{x}}\right).$$

Facendo $L=11.H$, $x=5H$ si ottiene.

$$t=(2,29)\sqrt{\frac{10 \,.\, H}{g}}.$$

Dal che si vede che il tempo impiegato dalla catena a percorrere lo spazio $5H$ è più che doppio di quello che essa avrebbe impiegato discendendo liberamente per uguale spazio.

Questione 7.

13. *Una catena pesante, uniforme e flessibile passa sopra una troclea mobile intorno al suo asse fisso E (fig. 6.). Da una parte la catena è libera e pende verticalmente; dall' altra parte una porzione indefinita di essa catena è sostenuta da un piano immobile. Abbandonando questa catena all' azione della gravità, si domandano le equazioni del suo movimento.*

Al principio del moto sia H la lunghezza della porzione di catena che pende liberamente, ed L la lunghezza costante della parte di catena compresa tra il piano fisso e la sommità della troclea; e sia primieramente $H>L$. Chiamato x lo spazio percorso da un punto qualunque della catena H dopo il tempo t, si avrà

$$(H) \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{g(H-L+x)-\frac{dx^2}{dt^2}}{H+L+x}.$$

L' integrale di questa equazione preso in modo che sia $v=0$ quando $x=0$, è

$$v^2=\frac{2gx[3(H^2-L^2)+3Hx+x^2]}{3(H+L+x)^2}.$$

Allorchè x è divenuta assai grande rispetto ad H e ad L, si ha semplicemente

$$v=\sqrt{\frac{2gx}{3}};$$

e questo è il limite verso cui tende continuamente il valore della velocità della catena. Si ha pure

$$v = \sqrt{\frac{2gx}{3}},$$

qualunque sia x, quando è $H=2L$. In questi due casi si ha

$$t = \sqrt{\frac{6x}{g}}.$$

Negli altri casi il valore di t dovrà ricavarsi dall' integrale dell' equazione

$$dt = \frac{(H+L+x)\,dx\sqrt{3}}{\sqrt{2gx[3(H^2-L^2)+3Hx+x^2]}}.$$

14. Merita attenzione il caso in cui $H=L$. L' equazione differenziale del movimento diventa

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gx - \frac{dx^2}{dt^2}}{2H+x},$$

la quale integrata in modo che sia $v=C$ quando $x=0$, somministra

$$v^2 = \frac{2g(3Hx^2+x^3)+12H^2C^2}{3(2H+x)^2}.$$

E questa equazione darà il valore di v corrispondente ad un valore dato di x, purchè la velocità iniziale C non sia nulla.

Ma quando la velocità iniziale C è nulla, non si può ricavare il valore di v da questa equazione, dopo avervi fatto $C=0$. Poichè è facile l' accertarsi e per la natura stessa della questione e per via dell' analisi, che la risoluzione del proposto caso è data dall' equazione

$$x=0$$

la quale soddisfa all' equazione differenziale del movimento, e mostra che è $v=0$ qualunque sia il tempo t.

15. Sia ora $H<L$; chiamando y lo spazio percorso dopo il tempo t da un punto del ramo L della catena, sarà

$$(K) \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=g\left[\frac{L-H+y}{L+H-y}\right].$$

Da questa equazione, integrata in modo che sia $v=0$ quando $y=0$, si ottiene

$$v^2=4gL\log.\left[\frac{H+L}{H+L-y}\right]-2gy.$$

Preso, per esempio, $H=\frac{L}{2}$ e fatto $y=\frac{L}{2}$, si ha

$$v=(0{,}79)\sqrt{2g\cdot\frac{L}{2}};$$

e questa sarà la velocità che avrà la catena in movimento quando l'estremità della parte H si troverà alla sommità della troclea.

Questione 8.

16. *Siano (fig. 7.) due catene L ed H appese ad un filo il quale passa sopra una troclea di rimando, come nelle precedenti questioni. Le catene siano disposte in modo che quando una di esse, H per esempio, è tutta sostenuta dal filo, e tocca colla sua estremità inferiore un piano fisso N, l' altra catena L sia tutta sostenuta dal medesimo piano, in maniera però che tanta parte di essa debba tosto essere sollevata quanta è la parte della catena H, la quale, quando questa discende, viene di mano in mano a posarsi sul piano. Si domandano le equazioni del movimento di queste catene.*

Chiamato x lo spazio percorso dopo il tempo t dall' estremità superiore della catena H, si avrà

$$(L) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g(H-2x) - \frac{dx^2}{dt^2}}{H}.$$

L' integrale di questa equazione preso in modo che sia $v=0$ quando $x=0$, è

$$v^2 = 2g\left(H - x - He^{-\frac{2x}{H}}\right).$$

Da questa equazione si ricava che la velocità sarà massima quando

$$x = \frac{H \log. 2}{2} = (0{,}347)H;$$

ed il suo valore sarà

$$V = (0{,}66)\sqrt{2g(0{,}347)H} = (0{,}39)\sqrt{2gH}.$$

Si ricava ancora che le catene cesseranno, l' una di salire, e l' altra di discendere, quando si avrà

$$x = (0{,}8)H.$$

Questo valore di x esprime la lunghezza di cui si sarà accorciata la catena H discendendo, e la lunghezza di cui l' altra catena L si sarà sollevata dal piano.

Spento così il moto delle due catene, esso ricomincierà tosto in direzione contraria, cioè la catena di cui una parte più lunga è sostenuta dal filo, discenderà e farà salire la catena opposta.

Per determinare questo movimento siano L ed h le lunghezze iniziali delle porzioni di catene sostenute dal filo, così che sia $L > h$: chiamato y lo spazio descritto dal punto superiore della catena L dopo il tempo t, si avrà l' equazione

$$(L') \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g[L-h-2y] - \frac{dy^2}{dt^2}}{L+h};$$

dalla quale integrata in modo che sia $v=0$, quand $y=0$, si ottiene

$$v^2 = 2g\left[L - y - Le^{-\frac{2y}{L+h}}\right].$$

Da questa equazione si ricaveranno i valori di y corrispondenti alla massima velocità ed alla fine del movimento.

Posto $L=(0,8)H$, $h=(0,2)H$, si trova che la massima velocità corrisponde ad $y=(0,235)H$, e che il suo valore è $V=(0,25)\sqrt{2gH}$.

La velocità è nulla quando $y=(0,51)H$. Perciò alla fine del movimento la lunghezza della porzione della catena L ancor sostenuta dal filo sarà $(0,29)H$; e dell' altra catena ne sarà sostenuta dal filo una porzione lunga $(0,71)H$.

In egual modo si determineranno le successive oscillazioni delle catene, delle quali le ampiezze andranno continuamente scemando.

Quando $L=h$, l' equazione differenziale del movimento è soddisfatta da $y=0$, qualunque sia il tempo t.

Se si cerca l' equazione del movimento del cilindro BD (quest. 1. fig. 1.) nel caso in cui esso discende nel liquido e solleva l' opposta massa M, si troverà una equazione della stessa forma delle equazioni (L) e (L').

Questione 9.

17. *In vece della catena H, sia appesa al filo una massa costante M (fig. 8.) la quale possa discendere indefinitamente : tutto il resto essendo come nella precedente questione, si domandano le equazioni del movimento di questa massa e dell' opposta catena L.*

Questo problema va distinto in due casi secondo che la massa M discende o sale.

Primo caso quando la massa M discende.

Sia l la lunghezza iniziale della catena L sostenuta dal

filo, e sia H la lunghezza di una porzione di simile catena di peso eguale a quello della massa M, e facciasi $H=K+l$: chiamato x lo spazio percorso dalla massa M dopo il tempo t, si avrà

$$(M) \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{g(K-x)-\frac{dx^2}{dt^2}}{K+2l+x}.$$

L' integrale di questa equazione preso in modo che sia $v=0$ quando $x=0$, è

$$v^2=\frac{2gx[3(K+2l)K-3lx-x^2]}{3(K+2l+x)^2}.$$

Pertanto la velocità sarà massima quando si avrà

$$x=\sqrt[3]{(K+2l)^2(4K+2l)}-(K+2l);$$

e sarà nulla quando sarà

$$x=-\frac{3l}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9l^2+12K(K+2l)};$$

e questo valore di x rappresenterà la discesa totale della massa M.

Se al principio del moto è $l=0$, la velocità massima corrisponderà ad

$$x=K(\sqrt[3]{4}-1)=(0,59)K;$$

ed avrà per valore

$$V=(0,59)\sqrt{2g(0,59)K}.$$

La discesa totale della massa M sarà

$$x=K\sqrt{3}=(1,73)K;$$

e tanta sarà la lunghezza della catena L sollevata dalla discesa della massa M.

18. *Secondo caso quando la catena discende.*

Chiamata $H+P$ la lunghezza iniziale della catena, ed y lo spazio percorso dopo il tempo t dall' estremità superiore della catena, sarà

$$(N) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = g\left(\frac{P-y}{2H+P-y}\right),$$

la quale integrata in modo che sia $v=0$ quando $y=0$, somministra

$$v^2 = 2gy - 4gH\log.\left(\frac{P+2H}{P+2H-y}\right).$$

Da questa equazione risulta che la velocità è massima quando

$$y=P;$$

e che la catena cessa di discendere quando è soddisfatta l' equazione

$$(P+2H-y)e^{\frac{y}{2H}} = P+2H.$$

Si prenda, per modo d' esempio, $P=(1,52)H$, si troverà

$$y=(2,52)H;$$

questo valore mostra che la velocità sarà nulla allo stesso istante in cui la catena sarà tutta discesa, e la massa M sarà salita all' altezza $(2,52)\ H$. E se si prende $P=H$, si troverà $v=0$ quando $y=(1,75)\ H$, e perciò una parte $(0,25)\ H$ della catena sarà ancora sospesa al filo quando il moto sarà spento.

Questione 10.

19. *Sia finalmente una catena di lunghezza indefinita, la quale passando sopra una troclea E, (fig. 9.) pende da una parte e dall' altra della troclea, in modo che le porzioni L e l della catena, costanti di lunghezza, rimangono sospese e verticali, e le rimanenti porzioni indefinite di essa catena sono sostenute dai piani orizzontali e fissi N e Q.*

Si domanda di determinare il moto di questa catena così disposta, cagionato dalla gravità.

Posto $L>l$, sia x lo spazio percorso da un punto

della porzione L dopo il tempo t, si avrà

$$(P) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g(L-l) - \frac{dx^2}{dt^2}}{L+l},$$

dalla quale si ricava

$$t = \frac{(L+l)}{2\sqrt{g(L-l)}} \cdot \log.\left[\frac{\sqrt{g(L-l)}+v}{\sqrt{g(L-l)}-v}\right],$$

ossia

$$v = \frac{\sqrt{g(L-l)}\left[e^{\frac{2t\sqrt{g(L-l)}}{L+l}} - 1\right]}{e^{\frac{2t\sqrt{g(L-l)}}{L+l}} + 1};$$

e quindi

$$x = (L+l)\log.\frac{1}{2}\left[e^{\frac{t\sqrt{g(L-l)}}{L+l}} + e^{\frac{-t\sqrt{g(L-l)}}{L+l}}\right];$$

ove, quando $x=0$, è pure $v=0$ e $t=0$.

Da questa equazione si ricava che la velocità v ha per limite il valore

$$V = \sqrt{2g\left(\frac{L-l}{2}\right)},$$

al qual limite non arriva mai; ma le stesse equazioni mostrano che dopo breve tempo la velocità v sarà pochissimo diversa dalla velocità V, ed allora il moto potrà aversi per uniforme.

Il valore precedente di x farà conoscere quanta lunghezza di catena sarà passata sulla troclea dopo un dato tempo t.

È osservabile come il movimento di questa catena è analogo a quello con cui una sfera solida discende in

virtù della sola gravità in un liquido omogeneo; e il movimento della sfera sarà affatto identico con quello della catena, se, posta Δ la densità costante del liquido, la sfera avrà la densità $\frac{L+l}{2l} \cdot \Delta$, ed il raggio $r = \frac{3l}{8}$.

Il moto considerato nelle precedenti questioni è dovuto alla discesa di corpi pesanti abbandonati all' azione della gravità: ma le forze motrici che si applicano alle macchine sono per l' ordinario tali che le loro variazioni dipendono da altre cause e seguono altre leggi. Così accade nella percossa dell' acqua, nell' impulso del vento, nella pressione de' fluidi elastici e nella forza degli agenti animati. Addurremo perciò alcuni esempj di moti varii cagionati da queste diverse forze.

Questione II.

20. *Contro un corpo solido di figura data (fig. 10.) agisce continuamente e direttamente una corrente d' acqua dotata della velocità costante V. Il solido è immerso nella corrente, e ne ha la stessa gravità specifica. Si domanda la determinazione del movimento di questo solido.*

Chiamando x lo spazio, e v la velocità del corpo dopo il tempo t, si avrà:

$$(Q) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = m\left(V - \frac{dx}{dt}\right)^2, \quad \text{ossia}$$

$$\frac{dv}{dt} = m(V - v)^2;$$

ove m è una quantità la quale dipende dalla figura del corpo, dalla sua gravità specifica e da quella della corrente. Si vede pertanto che il moto si accelera sempre finchè è $V > v$, e cessa d' accelerarsi quando è $V = v$.

Integrando l' equazione precedente in modo che sia $v = 0$ quando $t = 0$ si ha

$$v = V\left(1 - \frac{1}{1 + mVt}\right).$$

Questa espressione fa vedere che la velocità del corpo cresce continuamente e che non arriva mai ad essere eguale a quella della corrente. Tuttavia si deve osservare che l' aumento della velocità v, assai rapido nei primi istanti del moto, diventa continuamente meno considerabile, talchè dopo breve tempo si può prendere la velocità v come sensibilmente eguale alla velocità V della corrente, ed il moto del corpo come uniforme; il che risulta pure dall' equazione seguente

$$x = Vt - \frac{1}{m}\log.(mVt + 1),$$

ove x è lo spazio percorso dal corpo dopo il tempo t.

21. Per un esempio supponiamo che il corpo continuamente spinto dalla corrente V sia una sfera (fig. 10.) del raggio r e della densità Δ, la quale densità sia pure quella della corrente, in cui la sfera è tutta immersa e sostenuta; avremo $m = \frac{3}{16r}$; e

$$v = V\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{3Vt}{16r}}\right).$$

Sia ora $r =$ met. 0,05 sarà

$$v = V\left(1 - \frac{1}{1 + (3,75)Vt}\right);$$

e perciò facendo $t=60''$, $t=120''$ ecc., si trova

$$v=V\left(1-\frac{1}{225.V}\right);\quad v=V\left(1-\frac{1}{450.V}\right);\ \text{ecc.}$$

Se il raggio della sfera è maggiore del precedente, la velocità della medesima cresce meno rapidamente: sia per esempio $r=$ met. 0,2, tutte le altre quantità rimamanendo le stesse, si troverà

$$v=V\left(1-\frac{1}{1+(0,9375)Vt}\right);$$

e perciò facendo $t=60''$, $t=120''$ ecc. si ottiene

$$v=V\left(1-\frac{1}{(56,25)V}\right);\quad v=V\left(1-\frac{1}{(112,50)V}\right);\ \text{ecc.}$$

Questione 12.

22. *Un corpo solido è spinto ad un tempo su due faccie opposte da due correnti direttamente contrarie, (fig. 11.) come arriverebbe ad un corpo in parte immerso nell' acqua, il quale fosse spinto dalla corrente di questa, e nella parte sporgente fosse spinto in direzione contraria dalla corrente del vento. Si domanda la determinazione del movimento di questo corpo.*

Chiamando x lo spazio percorso, v la velocità del corpo dopo il tempo t, e V, V' le velocità costanti dell' acqua e del vento, si avrà

$$(R)\quad \frac{d^2x}{dt^2}=m\left(V-\frac{dx}{dt}\right)^2-n\left(V'+\frac{dx}{dt}\right)^2,\ \text{ossia}$$

$$\frac{dv}{dt}=m\,(V-v)^2-n(V'+v)^2;$$

ove m ed n sono coefficienti costanti dipendenti dalla densità e figura del corpo e dalla natura delle correnti che lo spingono.

Da questa equazione risulta che il moto sarà uniforme

quando si avrà

$$v = \frac{V\sqrt{m} - V'\sqrt{n}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} = u .$$

Integrando l' equazione tra dv e dt in modo che sia $v = 0$ quando $t = 0$, si ha

$$t = \frac{1}{2(V + V')\sqrt{mn}} . \log . \left[\frac{u}{u - v} \left(1 - \frac{v(\sqrt{m} - \sqrt{n})}{V\sqrt{m} + V'\sqrt{n}} \right) \right] .$$

Da questa equazione si vede che è $t = \infty$ quando $v = u$, ciò che indica che il moto non arriverà mai ad essere rigorosamente uniforme.

Ma mettendo l' equazione precedente sotto la forma

$$v = \frac{u\left(e^{2(V+V')t\sqrt{mn}} - 1\right)}{e^{2(V+V')t\sqrt{mn}} - \frac{(\sqrt{m} - \sqrt{n})u}{V\sqrt{m} + V'\sqrt{n}}} ,$$

si scorge tosto che quando il tempo sarà cresciuto alcun poco, sarà sensibilmente $v = u$, ed il moto uniforme. Si scorge ancora che sarà $v = 0$ quando $u = 0$, cioè quando sarà

$$V\sqrt{m} = V'\sqrt{n} .$$

L' equazione tra lo spazio x percorso dal corpo ed il tempo t sarà

$$(m-n)x = (\sqrt{m} + \sqrt{n})(V\sqrt{m} + V'\sqrt{n})t$$

$$- \log . \left[\frac{(Vm + V'n + (V + V')\sqrt{mn})e^{2(V+V')t\sqrt{mn}} - (m-n)u}{2(V + V')\sqrt{mn}} \right] .$$

23. Per una applicazione numerica di queste equazioni supponiamo che il corpo sia un parallelepipedo solido, il quale si muova in una corrente d' acqua in modo che la sua lunghezza sia parallela alla direzione della corrente e che il corpo sporgendo fuori dell' acqua soffra pure

l' impulso del vento supposto di direzione contraria a quella dell' acqua.

Siano a, b, l, Δ l' altezza, la larghezza, la lunghezza e la densità del solido; D, δ le densità dell' acqua e dell' aria; α la parte dell' altezza del solido immersa nell' acqua; avremo

$$m = \frac{\alpha D}{2\,a\,l\Delta}\,; \qquad n = \frac{(a-\alpha)\delta}{2\,a\,l\Delta}\,:$$

ma si ha $\Delta = \frac{\alpha D}{a}$; perciò

$$m = \frac{1}{2l}\,; \qquad n = \frac{(a-\alpha)\delta}{2\,\alpha\,l D}\,.$$

Prendiamo $\alpha = \frac{a}{3}$, e siccome è $\frac{\delta}{D} = 0{,}00125$, sarà

$$u = \frac{20\,V - V'}{21}\,.$$

Così quando fosse $V' = 20\,V$, il solido non prenderebbe moto progressivo in virtù dei soli impulsi dell' acqua e dell' aria.

Se fosse $V' = 0$, sarebbe

$$u = (0{,}952)\,V\,,$$

ed in questo caso la diminuzione della velocità è dovuta unicamente alla resistenza dell' aria tranquilla.

Facendo $V = \text{met.}\ 1$, $V' = 0$ si ha

$$v = \frac{20\left(e^{\frac{t}{20l}} - 1\right)}{21\,e^{\frac{t}{20l}} - 19}\,;$$

dalla quale espressione si vede come la velocità v dipenda dalla lunghezza l del solido: così prendendo $l = \text{met.}\ 5$ si trova che quando $t = 100''$ è

$$v = \overset{\text{met.}}{0{,}902}$$

ma se $l=$ met. 10, non si avrà questa velocità se non quando $t=200''$.

Sia ora $V=$ met. 1; $V'=$ met. 4; l'espressione generale della velocità v diventerà

$$v=\frac{48(e^{\frac{t}{4l}}-1)}{63e^{\frac{t}{4l}}-38}.$$

A misura che t cresce, la velocità si accosta sempre più al valore di

$$u=\overset{\text{met.}}{0,762}.$$

Così prendendo $l=$ met. 5, e $t=20''$ si ha

$$v=\overset{\text{met.}}{0,619};$$

e prendendo $t=100''$ si ha

$$v=\overset{\text{met.}}{0,760}.$$

Questione 13.

24. *Il fondo EC di un tubo verticale (fig. 12.) contiene aria condensata. Uno stantuffo B può scorrere lungo questo tubo, aperto superiormente in D: si domanda la determinazione del moto dello stantuffo nel tubo, quando all'aria condensata si permette di dilatarsi.*

Sia gF il peso equivalente alla pressione atmosferica, che agisce dall' alto al basso sullo stantuffo; M la massa costante di questo; $EC=a$ l' altezza iniziale occupata dall' aria condensata nel tubo; ngF il peso equivalente alla pressione esercitata da quest' aria condensata, essendo $n>1$.

Chiamato x lo spazio BE percorso dallo stantuffo nel tempo t, si avrà

$$(S) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{ngaF}{(a+x)M} - \frac{g(F+M)}{M}.$$

Integrando in modo che sia $v=0$ allorchè $x=0$, si ottiene

$$v^2 = \frac{2ngaF}{M}.\log.\left(\frac{a+x}{a}\right) - \frac{2g(F+M)}{M}.x.$$

Da questa espressione si ricava che la velocità v sarà massima quando si avrà

$$x = \frac{anF}{F+M} - a;$$

e che la velocità v sarà di nuovo nulla quando si avrà

$$x+a = a.e^{\frac{F+M}{nF}.\frac{x}{a}}.$$

25. Per un esempio numerico sia

$$M = \frac{F}{12}; \quad n = 10:$$

Si troverà che la velocità massima corrisponde ad $x = \frac{107a}{13} = (8,23)a$, e che il suo valore è

$$V = (12,64)\sqrt{2ga}.$$

Si troverà inoltre che lo stantuffo salirà sino al punto in cui sarà $x=(32,4)a$: giunto a questo punto lo stantuffo non avrà più velocità, e la densità dell' aria contenuta nel tubo tra il fondo e lo stantuffo sarà 0,299 di quella dell' aria esterna.

Quando lo stantuffo sarà arrivato all' altezza $x=9a$, la densità dell' aria interna sarà eguale a quella dell' aria esterna. Lo stantuffo dal punto corrispondente alla sua velocità massima sino all' altezza $x=(32,4)a$ si muoverà in virtù dell' inerzia, cioè per la velocità concepita prima, poichè di più non ne può acquistare dall' aria interna.

26. Supponiamo ora che al principio del moto il tubo contenga nella parte superiore allo stantuffo B un liquido dato, per esempio acqua, in modo che alzandosi lo stantuffo, il liquido esca dalla bocca superiore D del tubo. Si domanda la determinazione del moto dello stantuffo.

Ritenute le denominazioni precedenti e chiamata L la lunghezza data ED del tubo, e gK il peso della colonna d' acqua che ha per base la sezione del tubo, e per altezza L, è chiaro che quando lo stantuffo sarà salito all' altezza x, la massa d' acqua nel tubo sarà $\frac{K(L-x)}{L}$; perciò si avrà l' equazione

$$(T) \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{nagFL}{(a+x)(ML+KL-Kx)}-\frac{gFL}{ML+KL-Kx}-g;$$

la quale integrata in modo che si abbia $v=0$, quando $x=0$, somministra

$$v^2=\frac{2nagFL}{ML+KL+Ka}\cdot\log.\left(\frac{a+x}{a}\right)-2gx$$

$$-\left[\frac{2nagFL}{ML+KL+Ka}-\frac{2gFL}{K}\right].\log.\left(\frac{ML+KL-Kx}{ML+KL}\right).$$

Di qui si ricaverà la velocità massima, e l' altezza x in cui la velocità v sarà nulla: noi con questa equazione risolveremo il problema seguente.

27. Tutto essendo dato, fuorchè n, cerchiamo qual debba essere questo numero, affinchè lo stantuffo salga sino alla sommità D del tubo, ed ivi la sua velocità sia nulla, di modo che quando lo stantuffo cesserà di alzarsi, l' acqua sia tutta cacciata fuori del tubo. È chiaro che si otterrà il valore di n, eguagliando a zero l' espressione del valore di v dopo avervi fatto $x=L$.

Misurando la pressione atmosferica con una colonna

d' acqua, e chiamando H l' altezza di questa colonna, si ha $H =$ met. 10,3. Prendiamo

$$M = \frac{F}{40}; \quad a = \frac{H}{20}; \quad L = \text{met.} 8;$$

sarà

$$\frac{K}{F} = \frac{L}{H} = 0,7767; \quad \frac{M}{F} = \frac{1}{40} = 0,025;$$

fatte queste sostituzioni si troverà $n = 11,52$; cioè nello spazio $a =$ met. 0,515 del tubo la densità iniziale dell' aria dovrà essere 11,52 volte più grande di quella dell' aria esterna atmosferica, affinchè lo stantuffo, spinto dall' elasticità di quest' aria condensata, s' alzi giusto sino alla sommità del tubo, e cacci fuori tutta l' acqua contenuta nel medesimo. Giunto lo stantuffo a questa sommità, la densità dell' aria interna del tubo sarà 0,69 di quella dell' aria esterna.

Questione 14.

28. *Un parallelepipedo solido è tutto immerso in una corrente d' acqua in modo che la sua lunghezza è parallela alla direzione della corrente, supposta sensibilmente orizzontale. La gravità specifica del medesimo è eguale a quella dell' acqua. Si domanda di determinare il moto di questo solido quando esso viene tirato con direzione parallela ed opposta a quella della corrente da uno o da più cavalli.*

In questa maniera d' azione assumeremo che la forza assoluta e permanente del cavallo, il quale progredisce colla velocità v, sia espressa dalla formola

$$F\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2;$$

ove F è il peso assoluto cui il cavallo può resistere senza muoversi, e V è la velocità del cavallo quando esso non tira peso alcuno. Questa formola è dedotta da una lunga serie di accurate sperienze fatte in Inghilterra sul tiro di barche di fondo piano per via di cavalli. Dalle medesime sperienze si sono ottenuti i seguenti valori, cioè

$$F = 190^{\text{chilogr.}}\,; \quad V = 3^{\text{met.}}\,.$$

Così se n cavalli tirano ad un tempo e nello stesso modo un medesimo corpo, la loro forza assoluta e permanente è espressa da

$$nF\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2.$$

Chiamando pertanto M la massa del solido; v la sua velocità, eguale a quella de' cavalli; x lo spazio percorso alla fine del tempo t; V' la velocità costante della corrente d' acqua, la cui sezione si suppone indefinita; a, b, l l' altezza, la larghezza e la lunghezza del solido; e facendo inoltre $F = gP$, ove P è una massa d' acqua tale che il suo peso ha per valore F; si avrà

$$(X) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{ngP}{M}\left(1 - \frac{dx}{Vdt}\right)^2 - \frac{1}{2l}\left(V' + \frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Da questa equazione, trattata come l' equazione (R) del n.° 22, si ricava che dopo breve tempo il moto sarà uniforme, e si avrà

$$v = u = V.\left(\frac{\sqrt{2gl.n.\frac{P}{M}} - V'}{\sqrt{2gl.n.\frac{P}{M}} + V}\right).$$

Perciò se sarà

$$V' > \sqrt{2gl.n.\frac{P}{M}},$$

la forza di n cavalli non potrà resistere e far equilibrio all' urto della corrente contro il solido. Quando sarà

$$V' = \sqrt{2gl.n.\frac{P}{M}},$$

i cavalli potranno semplicemente far equilibrio all' urto, ma non già progredire.

Finalmente quando si avrà

$$V' < \sqrt{2gl.n.\frac{P}{M}},$$

i cavalli progrediranno colla velocità u, e lo sforzo di ciascuno di essi sarà continuamente equivalente allo sforzo del peso espresso da

$$F\left(\frac{V+V'}{V+\sqrt{2gl.n.\frac{P}{M}}}\right)^2.$$

29. Ritenendo i valori precedenti di F e di V, cerchiamo il numero de' cavalli necessari per tirare un parallelepipedo solido alto met. 0,75, largo met. 4, e lungo met. 12, tutto immerso in una corrente d'acqua di met. 1,50 di velocità per minuto secondo: la gravità specifica del solido essendo eguale a quella dell' acqua, esso peserà 36000 chilogrammi. Si avrà

$$\frac{P}{M} = 0,0053;$$

e si troverà dover essere

$$n > 1,25;$$

cioè abbisogneranno per lo meno due cavalli. Ma impiegando due soli cavalli non si avrà il massimo effetto utile che ciascuno di essi può produrre. Per ottenerlo convien render massimo il valore della formola $F\left(1-\frac{v}{V}\right)^2.v$, la quale esprime l' effetto utile di ciascun cavallo. Ora

questa formola ha il massimo valore quando $v = \frac{V}{3}$, cioè quando nel nostro caso è $v = 1$ met. Con questo valore di v l' effetto massimo diventa chil. (84,4) . 1 met. cioè in ciascun minuto secondo ciascun cavallo fa percorrere, tirando, la distanza di un metro ad una massa del peso di chil. 84,4. Perciò facendo $u = 1$ met. e sostituendo nell' espressione di u gli altri valori numerici dati, si otterrà

$$n = 11.$$

Con questo numero di cavalli ciascuno di essi tirerà un peso di chil. 84,4 con una velocità di un metro per minuto secondo.

Impiegando un numero minore o maggiore di cavalli, l' effetto utile di ciascuno di essi sarà minore del precedente. Così prendendo, per esempio, 2 oppure 4 oppure 25 cavalli, si troverà che l' effetto utile di ciascuno di essi sarà rispettivamente li 0,03 oppure li 0,70, oppure li 0,87 dell' effetto utile che si ottiene impiegando undici cavalli per tirare il solido proposto.

Da questo esempio si vede come coll' equazione tra u, V, V', n ed M, si possano determinare alcune di queste quantità, quando le altre sono date: così dato il numero de' cavalli e la velocità della corrente, si possono determinare le dimensioni del solido ossia della massa M affinchè essa sia tirata dai medesimi con quella velocità che corrisponde al massimo loro effetto utile.

30. Se in vece della forza de' cavalli si impiega al tiro la forza degli uomini, si deve fare $F = 31{,}75$ chilogr.; $V = 1{,}83$ met. nella formola $F\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2$.

Ciò posto, *si domanda di determinare il movimento con cui una massa data salirà verticalmente in virtù della*

forza d' uomini, i quali per via di corde e di carrucole di rimando la tirano camminando orizzontalmente.

Chiamata M la massa data, P una massa della stessa materia e tale che sia $gP = F$, x la salita della massa M dopo il tempo t, ed n il numero degli uomini impiegati al tiro, si avrà

$$(Y) \qquad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{ngP}{M}\left(1 - \frac{dx}{Vdt}\right)^2 - g \text{, ossia}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ngP}{M}\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2 - g.$$

Da questa equazione si ricaverà, come negli esempi precedenti, che dopo breve tempo la massa salirà con moto uniforme, e con velocità

$$v = u = V\left(1 - \sqrt{\frac{M}{nP}}\right).$$

Perciò il numero degli uomini necessario per alzare la massa M dovrà essere tale che sia

$$n > \frac{M}{P};$$

ed affinchè ciascuno di essi produca nel tiro il massimo effetto, si dovrà prendere

$$n = \frac{9M}{4P}.$$

Per modo d'esempio la massa M pesi 500 chilogrammi, sarà

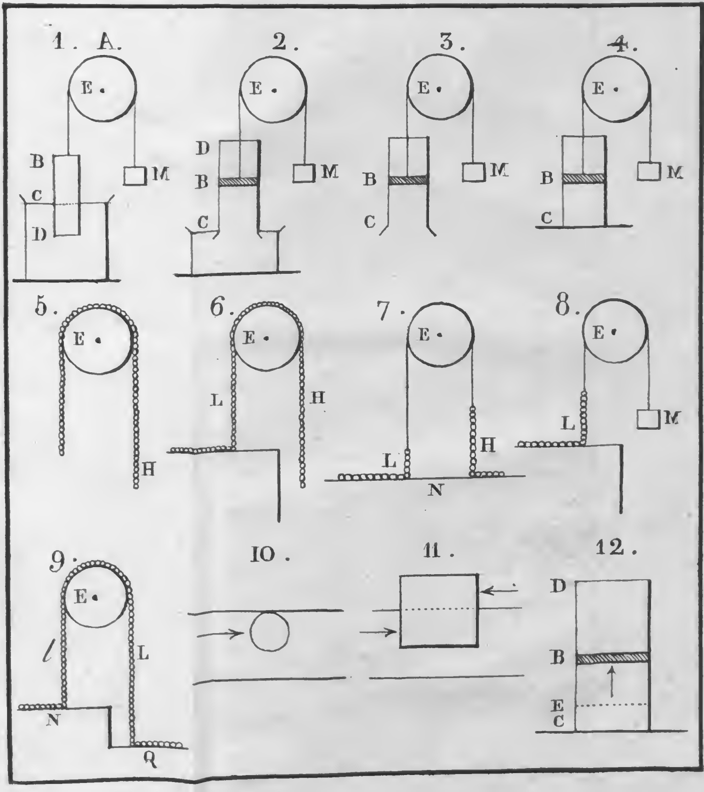
$$\frac{M}{P} = 15{,}75;$$

quindi per alzare questa massa si richiederanno per lo meno 16 uomini; ma impiegandone 35 si otterrà il massimo effetto utile che essi possano produrre in questa maniera d' azione, e non sarebbe cosa economica l' impiegarne un numero maggiore o minore di questo.

V. Tosi Revisore Arcivescovile.

V. si stampi

Ferraris Riformatore.


1. A.
E.
B
M
C
D
2.
E.
D
B
M
C
3.
E.
B
M
C
4.
E.
B
M
C
5.
E.
H
6.
E.
L
H
7.
E.
L
H
N
8.
E.
L
M
9.
E.
l
L
N
Q
10.
11.
12.
D
B
E
C



